

101 年土木、結構類公務人員高等考試三級考試測量學參考解答

一、參考網路上的兩筆資料：

1. 記錄大紅紋鳳蝶的觀察內容如下：

臺灣二度分帶 TWD 97

E：219120

N：2599923

98 年 03 月 20 日 AM 0930 左右，近 30 隻在櫻花樹上。

2. 某渡假會館所提供的位置：

TWD 97 坐標

24:28:02.80974

120:57:06.26939

TWD 67 坐標

24:28:09.16119

120:56:36.81789

請回答下列問題：

(一) 判斷大紅紋鳳蝶觀察地點的坐標單位為何？渡假會館的坐標單位為何？（5 分）

(二) 何謂 TWD 67 與 TWD 97？（15 分）

(101 土木高考-測量學 #1)

【參考解答】

(一) 大紅紋鳳蝶觀察地點的坐標單位為「公尺」，渡假會館的坐標單位為「度:分:秒」。

(二) TWD67 是民國 86 年以前所使用的國家平面基準系統，其定義如下：

1. 採用 GRS67 參考橢球體，其地球原子如下：

(1) 長半徑： $a = 6378160m$ (2) 短半徑： $b = 6356774.7192m$ (3) 扁率： $f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.25}$

(4) 離心率：

2. 以南投埔里虎子山三角點為大地基準點（坐標原點），其經度為 $120^{\circ}58'25.975''$ ，緯度為 $23^{\circ}58'32.340''$ ，對頭拒山三角點之方位角為 $323^{\circ}57'23.135''$ 。3. 採用 2 度 TM 投影，中央子午線為 $121^{\circ}E$ ，坐標原點為中央子午線與赤道交點，且橫坐標西移 250,000 公尺，中央子午線之尺度比率為 0.9999。

TWD97 是民國 86 年以後所採用的國家大地基準，係利用國際地球參考框架 (International Terrestrial Reference Frame, ITRF) 所建構，其定義如下：

1. 其方位採國際時間局 (Bureau International de l'Heure, 簡稱為 BIH) 定義在 1984.0 時刻之方位。

2.採用 GRS80 參考橢球體，作為 GPS 衛星測量測得之 WGS84 坐標與大地坐標

$(\varphi, \lambda, \alpha)$ 的轉換依據，其地球原子如下：

(1)長半徑： $a = 6378137m$

(2)短半徑： $b = 6356752m$

(3)扁率： $f = \frac{1}{298.257222101}$

(4)離心率： $e^2 = 0.006694478196$

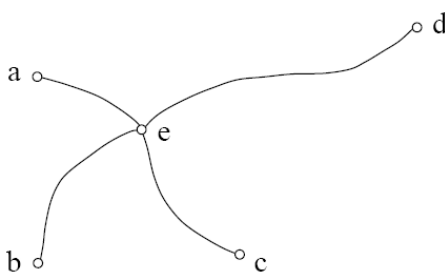
3.應用 GPS 衛星測量技術建立 8 個衛星追蹤站及 105 個一等衛星控制點，並實施 GPS 網形觀測。

4.將 8 個追蹤站與 ITRF 聯測，並以其 1997 年坐標值來約制 105 個一等衛星點進行網形平差，平差成果當作台灣地區新的大地基準 3D 坐標參考框架。

5.台灣、琉球嶼、綠島、蘭嶼及龜山島等地區之投影方式採用橫麥卡托投影經差二度分帶，其中央子午線為東經 121 度，投影原點向西平移 250,000 公尺，中央子午線尺度比為 0.9999；另澎湖、金門及馬祖等地區之投影方式，亦採用橫麥卡托投影經差二度分帶投影方式，其中央子午線定於東經 119 度，投影原點向西平移 250,000 公尺，中央子午線尺度比為 0.9999。

二、一水準網如圖所示，各水準路線長度分別為 $S_{ae} = 1km$ 、 $S_{be} = 2km$ 、 $S_{ce} = 2km$ 、 $S_{de} = 3km$ ，測量之高差 $\Delta H_{ae} = +1.325m$ 、 $\Delta H_{be} = +4.352m$ 、 $\Delta H_{ce} = -2.865m$ 、 $\Delta H_{de} = -0.473m$ ，各點高程值分別為 $H_a = 90.340m$ 、 $H_b = 87.322m$ 、 $H_c = 94.553m$ 、 $H_d = 92.133m$ 。試確定四條水準線之權？計算 e 點之高程最或是值與其中誤差？（20 分）

(101 土木高考-測量學 #2)



【參考解答】

(一)因權與水準線長度成反比，故各水準線之權值為：

$$P_{ae} : P_{be} : P_{ce} : P_{de} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 6 : 3 : 3 : 2$$

(二)由 a 點推算之 e 點高程值： $H_1 = 90.340 + 1.325 = 91.665m$

由 b 點推算之 e 點高程值： $H_2 = 87.322 + 4.352 = 91.674m$

由 c 點推算之 e 點高程值： $H_3 = 94.553 - 2.865 = 91.688m$

由 d 點推算之 e 點高程值： $H_4 = 92.133 - 0.473 = 91.660m$

e 點之高程最或是值爲：

$$H_e = 91.000 + \frac{6 \times 0.665 + 3 \times 0.674 + 3 \times 0.688 + 2 \times 0.660}{6 + 3 + 3 + 2} = 91.671 \text{ m}$$

$$V_1 = 91.671 - 91.665 = +0.006 \text{ m}$$

$$V_2 = 91.671 - 91.674 = -0.003 \text{ m}$$

$$V_3 = 91.671 - 91.688 = -0.017 \text{ m}$$

$$V_4 = 91.671 - 91.660 = +0.011 \text{ m}$$

$$[PVV] = 6 \times 0.006^2 + 3 \times (-0.003)^2 + 3 \times (-0.017)^2 + 2 \times 0.011^2 = 1.352 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$e \text{ 點之高程最或是值之中誤差爲： } M_{H_e} = \pm \sqrt{\frac{1.352 \times 10^{-3}}{(6+3+3+2)(4-1)}} = \pm 0.006 \text{ m}$$

三、利用三角高程測量，設站於已知高程為 16.000 m 之 A 點，儀器高為 $1.512 \pm 0.002 \text{ m}$ ，照準規標高為 $1.621 \pm 0.003 \text{ m}$ 的 B 點，測得斜距為 $875.320 \pm 0.050 \text{ m}$ ，天頂距為 $80^\circ 35' 47'' \pm 5''$ ；不考慮大氣折光與地球曲率， B 點高程及其誤差如何？（10 分）考慮大氣折光與地球曲率改正， B 點高程及其誤差又如何？（10 分）

(101 土木高考-測量學 #3)

【參考解答】

(一) 不考慮大氣折光與地球曲率

$$\begin{aligned} H_B &= H_A + L \cdot \cos z + i - t \\ &= 16.000 + 875.320 \times \cos 80^\circ 35' 47'' + 1.512 - 1.621 \\ &= 158.908 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial L} = \cos \alpha = \cos 80^\circ 35' 47'' = 0.163388141$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial z} = -L \cdot \sin z = -863.557 \text{ m}$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial i} = 1$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial t} = -1$$

$$\begin{aligned} M_{H_B} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial H_B}{\partial L}\right)^2 \cdot M_L^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{M''_\alpha}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \cdot M_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial t}\right)^2 \cdot M_t^2} \\ &= \pm \sqrt{0.163388141^2 \times 0.050^2 + (-863.557)^2 \times \left(\frac{5''}{206265''}\right)^2 + 0.002^2 + (-1)^2 \times 0.003^2} \\ &= \pm 0.023 \text{ m} \end{aligned}$$

(二)考慮大氣折光與地球曲率

$$H_B = H_A + L \cdot \cos z + i - t + \frac{(1-K)(L \cdot \sin z)^2}{2R}$$

$$= 16.000 + 875.320 \times \cos 80^\circ 35' 47'' + 1.512 - 1.621 + \frac{(1-0.13)(875.320 \times \sin 80^\circ 35' 47'')^2}{2 \times 6370000}$$

$$= 158.959m$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial L} = \cos z + \frac{(1-K) \cdot L \cdot \sin^2 z}{R}$$

$$= \cos 80^\circ 35' 47'' + \frac{(1-0.13) \times 875.320 \times \sin^2 80^\circ 35' 47''}{6370000} = 0.163504499$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial z} = -L \cdot \sin z + \frac{(1-K) \cdot L^2 \cdot \sin 2z}{2R}$$

$$= -875.320 \times \sin 80^\circ 35' 47'' + \frac{(1-0.13) \times 875.320^2 \times \sin 161^\circ 11' 34''}{2 \times 6370000} = -863.540m$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial i} = 1$$

$$\frac{\partial H_B}{\partial t} = -1$$

$$M_{H_B} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial H_B}{\partial L}\right)^2 \cdot M_L^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{M_\alpha''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \cdot M_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial t}\right)^2 \cdot M_t^2}$$

$$= \pm \sqrt{0.163504499^2 \times 0.050^2 + (-863.540)^2 \times \left(\frac{5''}{206265''}\right)^2 + 0.002^2 + (-1)^2 \times 0.003^2}$$

$$= \pm 0.023m$$

四、電離層折射 (Ionospheric refraction) 誤差是全球定位系統 (Global Positioning System, GPS) 的一項主要誤差來源，由於其影響大小與頻率有關，因此可以使用 GPS 雙頻 (Dual frequency) 觀測量的線性組合來消除其影響。令 L1 與 L2 的虛擬距離 (Pseudorange) 觀測量分別為：

$$P_1 = \rho + c \cdot (dT - dt) + \frac{40.3 \cdot n_e}{f_1^2}$$

$$P_2 = \rho + c \cdot (dT - dt) + \frac{40.3 \cdot n_e}{f_2^2}$$

其中 ρ 代表衛星至接收機的距離， c 為光速， dT 為接收機時錶誤差， dt 為衛星時錶誤差， n_e 為電離層電子含量密度， f_1 與 f_2 分別為 L1 與 L2 訊號之頻率，分別為 1575.42 MHz 及 1227.6 MHz。結合上述雙頻觀測量可以得到一個不受電離層影響的線性組合如下：

$$P_{ion-free} = \alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 = \rho + c \cdot (dT - dt)$$

請問此線性組合之係數 α_1 、 α_2 為何？(20 分)

(101 土木高考-測量學 #4)

【參考解答】

由 $f_1^2 \cdot P_1 - f_2^2 \cdot P_2$ 得：

$$\begin{aligned} f_1^2 \cdot P_1 - f_2^2 \cdot P_2 &= f_1^2 \cdot \rho + f_1^2 \cdot c \cdot (dT - dt) - f_2^2 \cdot \rho - f_2^2 \cdot c \cdot (dT - dt) \\ &= (f_1^2 - f_2^2) \cdot \rho + (f_1^2 - f_2^2) \cdot c \cdot (dT - dt) \end{aligned}$$

整理得：

$$P_{ion-free} = \frac{f_1^2}{(f_1^2 - f_2^2)} \cdot P_1 - \frac{f_2^2}{(f_1^2 - f_2^2)} \cdot P_2 = \alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 = \rho + c \cdot (dT - dt)$$

$$\text{故 } \alpha_1 = \frac{f_1^2}{(f_1^2 - f_2^2)}, \quad \alpha_2 = -\frac{f_2^2}{(f_1^2 - f_2^2)}。$$

五、測量偏差參數間，從 (u, v) 到 (x, y) 線性變換之定義： $x = u + v$ 與 $y = u - v$ 。試求解 (x, y) 線性變換到 (u, v) 的關係式，並證明此變換關係式是無誤的。(20 分)

(101 土木高考-測量學 #5)

【參考解答】

先直接利用聯立解算方式獲得從 (x, y) 線性變換到 (u, v) 的關係式如下：

$$x = u + v \cdots (a)$$

$$y = u - v \cdots (b)$$

$$\text{由 } \frac{(a)+(b)}{2} \text{ 得： } u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$\text{由 } \frac{(a)-(b)}{2} \text{ 得： } v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

利用矩陣方式證明從 (x, y) 線性變換到 (u, v) 的關係式如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

得證。