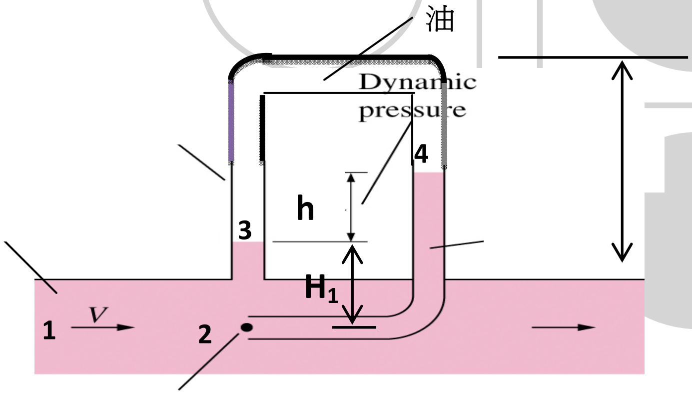
一、【參考題解】

如下圖在 **2** 點壓力達到最大稱爲停滯壓力(**stagnation pressure**)，而速度變爲 **0**，此速度爲 **0** 之點稱爲停滯點(**stagnation point**)。



柏努利方程 $P+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho gz=$

其中第一項 **P** 代表流體靜力壓(**static pressure**) 係以單管壓力計(**piezometer**)測量之；第二項 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 代表動壓力(**dynamic pressure**)係以皮托管(**pitot tube**)測量之；第三項**ρgz** 稱爲液靜壓 (**hydrostatic pressure**)，代表因高度改變而改變之位能與其相當之壓力。取 **1,2** 點間無能量損失之柏努利方程式得：

$$P_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2+\rho gz_1=P_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2+\rho gz_2$$

$$z_2=z_1 \qquad V_2=0$$

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 \qquad P_2-P_1 \qquad \rho g(H-h)$$

(皮托管係利用停滯壓力和靜壓力之差的測量儀器)

故 $P_2=P_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2$ (停滯壓力)

其中 $\boldsymbol{P_1}$ 爲在 **1** 點之靜壓力，測量靜壓力的方法是在水平的管壁上挖一個洞，插一根壓力計，以量測其靜壓力。由靜壓原理知：

$$P_1-\rho gH_1-\rho_{油}gh+\rho g(H_1+h)=P_2$$

得 $P_1=P_2+(\rho-\rho_{油})gh$ （此爲靜壓力)

(註**)**上述流場須滿足穩定流場、非黏滯流體、不可壓縮流體（密度爲常數）及沿任一流線上流

動。

二、【參考題解】

(一)加速度

$$a=\frac{D\vec{V}}{Dt}=(\vec{V}\bullet\nabla)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

$$=(-\frac{5y}{x^2+y^2})\bullet\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(-\frac{5y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{5x}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\right]+(+\frac{5x}{x^2+y^2})\bullet\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(-\frac{5y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{5x}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\right]+0$$

$$=\left[\left(-\frac{50xy^2}{(x^2+y^2)^3}\vec{i}+\frac{25x^2y-25y^3}{(x^2+y^2)^3}\vec{j}\right)\right]+\left[\left(-\frac{25xy^2-25x^3}{(x^2+y^2)^3}\vec{i}-\frac{50x^2y}{(x^2+y^2)^3}\vec{j}\right)\right]$$

$$=-\frac{25(x\vec{i}+y\vec{j})}{(x^2+y^2)^3}$$

(二) 類似 **100** 年水利高考

(a)由 **N-S *Eq*** 之 **x** 分量：

$$\rho(\cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\cancelto{0}{v\frac{\partial u}{\partial y}}+\cancelto{0}{w\frac{\partial u}{\partial z}})=\cancelto{0}{\rho g_x}-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\cancelto{0}{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2u}{\partial y^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2u}{\partial z^2}})$$

得： $\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}$

即： $-\rho\frac{5y}{x^2+y^2}\left[\frac{10xy}{(x^2+y^2)^2}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}$

故：$\int dP=\int 50\rho xy^2(x^2+y^2)^{-3}dx$

令 $x^2+y^2=z$ 則 $2xdx=dz$ 代入上式得

$P=\frac{-25\rho y^2}{2(x^2+y^2)^2}+C_1$ **C_1** 為常數 式**(1)**

(b)由 **N-S *Eq*** 之 **y** 分量：

$$\rho(\cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial t}}+\cancelto{0}{u\frac{\partial v}{\partial x}}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\cancelto{0}{w\frac{\partial v}{\partial z}})=\cancelto{0}{\rho g_y}-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu(\cancelto{0}{\frac{\partial^2v}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2v}{\partial y^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2v}{\partial z^2}})$$

得： $\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}$

即： $\rho\frac{5x}{x^2+y^2}\left[-\frac{10xy}{(x^2+y^2)^2}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}$

故：$\int dP=\int 50\rho x^2y(x^2+y^2)^{-3}dy$

令 $x^2+y^2=z$ 則 $2ydy=dz$ 代入上式得

$P=\dfrac{-25\rho x^2}{2(x^2+y^2)^2}+C_2$ **C_2** 爲常數 式**(2)**

聯合式**(1)** 與式**(2)**得： $P(x,y)=\dfrac{-25\rho}{2(x^2+y^2)}+C$ **C** 爲一常數

三、【參考題解】

由 **N-S *Eq*** 之 **z** 分量：

$$\rho(\underset{0}{\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}}+\underset{0}{\cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}}}+\overset{0}{\cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}}}+\overset{0}{\cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}})=\overset{\rho g}{\cancel{\rho g_z}}-\overset{0}{\cancel{\frac{\partial p}{\partial z}}}+\mu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\overset{0}{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}})$$

得： $\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\rho g$

即 $w(x)=\dfrac{-\rho g}{2\mu}x^2+C_1x+C_2$ **C_1** 與 **C_1** 爲相異二常數

將 **B.C** 代入： $x=0, w=0$ 及 $x=4mm$, w = 0.1 m/sec 及 $x=10mm$, w = 0.

得：$C_2=0$

$C_1=\dfrac{0.1}{0.004}+\dfrac{-\rho g}{2\mu}(0.004)$ 式**(1)**

及 $C_1=\dfrac{\rho g}{2\mu}(0.01)$ 式**(2)**

聯立式**(1)** 與式**(2)**得：

油的動力黏度爲 $\mu=\dfrac{\rho g}{0.7}=\dfrac{1(9.8)}{0.7}=14\,{}^{kg}\!/\!_{m\bullet \sec}$

其中 ρ 爲油的密度 **g** 爲重力加速度

四、【參考題解】

分別計算在截面 **A** 和 **B** 處的 **HGL(Grade-line height)**：

$$HGL_A=Z_A+\frac{P_A}{\rho g}=0+\frac{568}{1\times 9.8}=57.96^m$$

$$HGL_B=Z_B+\frac{P_B}{\rho g}=30\times\sin 37^0+\frac{202}{1\times 9.8}=38.6^m$$

在截面 **B** 處有較低的 **HGL**，故水流的方向是由 **A** 流向 **B**。

頭損 $h_L=HGL_A-HGL_B=$ **57.96 - 38.6 = 19.36$^{\mathbf{m}}$**

由 **Colebrook** 公式知 $\dfrac{1}{f^{1/2}}=-2\log\left[\dfrac{\varepsilon/D}{3.7}+\dfrac{2.51}{R_{ed}f^{1/2}}\right]$

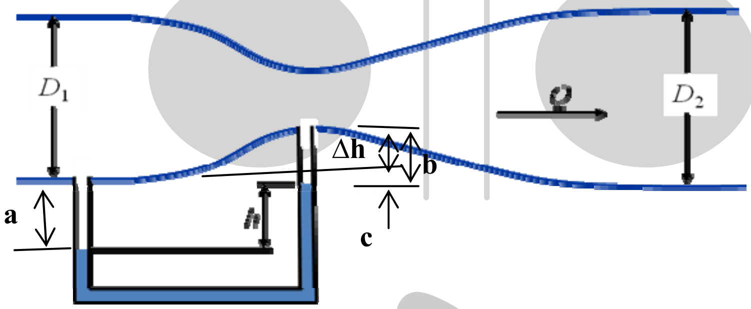
將 **ε=0.012mm**，**D=30mm**，$R_{ed}=\dfrac{64}{f}$ 代入上式以試誤法得： f = 1/16

由有摩擦損失的達西-偉士伯方程式**(Darcy weisbach equation)**之頭損知：

$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$　　故 $19.36=\frac{1}{16}\frac{30}{(0.03)}\frac{V^2}{2(9.8)}$　　得 **V= 2.46 m/sec**

故每分鐘的水體積流量為 **Q =AV=**$\frac{\pi D^2}{4}V=\frac{3.1416(0.03)^2}{4}(2.46)=$ **0.00174** $\mathbf{m^3}$**/sec**

五、【參考題解】



取 **1,2** 點間無能量損失之柏努利方程式得：

$$P_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2+\rho g z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2+\rho g z_2 \qquad \textbf{(1)}$$

由靜壓原理知：$P_1+\rho g a-\rho_{汞}gh-\rho g b=P_2$

則 $P_1-P_2=+\rho_{汞}gh+\rho g(b-a)$　　故 $P_1-P_2=+\rho_{汞}gh+\rho g[(\Delta h+\cancel{c})-(\cancel{c}+h)]$

即 $P_1-P_2=+\rho_{汞}gh+\rho g(\Delta h-h)$　　**(2)**

又 $V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{\frac{\pi}{4}D_1^2}=\frac{4Q}{\pi D_1^2}$　及 $V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{Q}{\frac{\pi}{4}D_2^2}=\frac{4Q}{\pi D_2^2}$　　**(3)**

而 $\mathbf{Z_1-Z_2=-\Delta h}$　　**(4)**

將**(2) (3) (4)**及數據 **$\mathbf{D_1}$=1m, $\mathbf{D_2}$=1.2m, Δh=1/2—0.5/2=0.25m, h=0.2m, ρ=1000kg/cm$\mathbf{^3}$, ρ汞=13600kg/cm$\mathbf{^3}$,** 代入**(1)**得：

$$\rho_{汞}gh+\rho g(\cancel{\Delta h}-h)+\frac{16}{5}\rho Q^2\left[\frac{1}{D_1^4}-\frac{1}{D_2^4}\right]-\rho g\cancel{\Delta h}=0$$

即 **13600(9.8)(0.2)-1000(9.8)(0.2)+**$\frac{16}{5}(1000)Q^2[\ \frac{1}{(1)^4}-\frac{1}{(1.2)^4})$ **]=0**

得 流量 **Q = 3.86 m$\mathbf{^3}$/sec**

最小截面處之流速為 **V=** $\frac{Q}{A}=\frac{3.86}{0.5(0.5)}=15.44$ **m/sec**