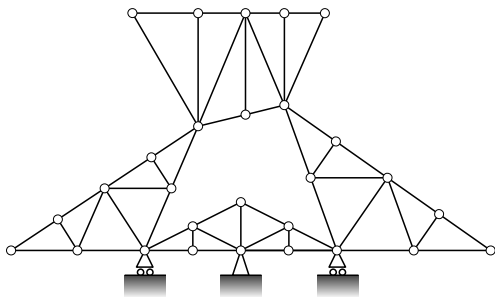
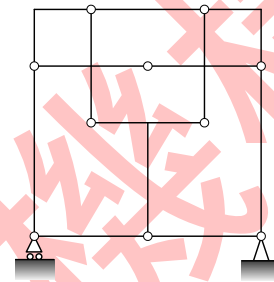


結構學

一、圖一 (a) 及圖一 (b) 顯示兩個由直線桿件構成之結構，桿件交會處有小圈處為鉸接，否則為剛接。請問它們是否為穩定結構？如為不穩定結構，請說明不穩定之原因，需以束制不足、變位圖或力平衡方程式說明之；如為穩定結構，請說明它們超靜定 (indeterminate) 的次數 R 。 $R=0$ 即表示為靜定結構 (determinate structure)。(10 分)



圖一 (a)



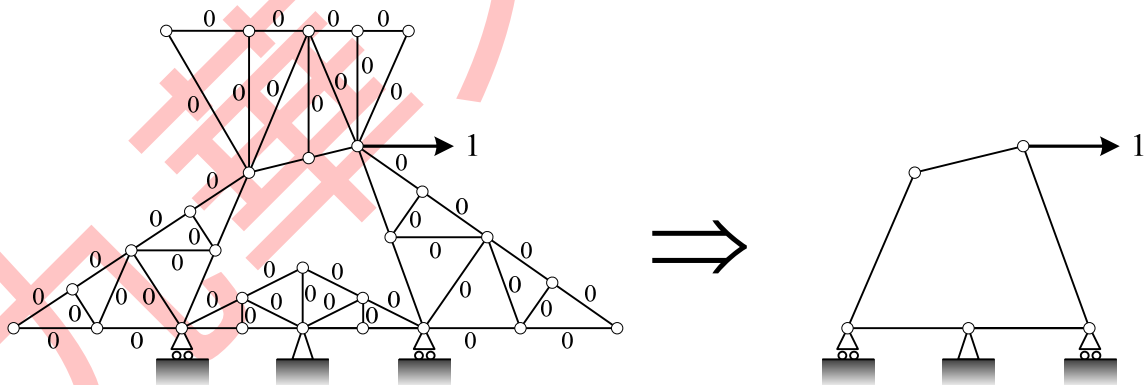
圖一 (b)

【問題剖析】

- (1) 判定桁架結構的穩定性問題可利用：1. 任意載重法 2. 零載重法
- (2) 判定幾度靜不定的問題時，可利用 $b+r+s-2j$ ，其中 b 為桿件數， r 為支承反力數， s 為有效剛接數， j 為節點數

【參考解答】

(1) 不穩定結構

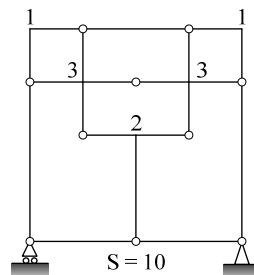


(2)

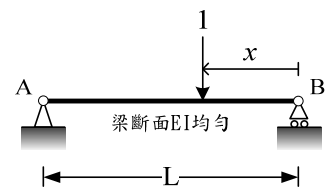
$$b = 20, r = 3, s = 1 + 1 + 3 + 3 + 2 = 10, j = 15$$

$$R = b + r + s - 2j = 20 + 3 + 10 - 2 \times 15 = 3$$

故為 3 度靜不定結構



二、設有如圖二所示斷面均勻之梁 AB，單位向下載重在 AB 間移動。
試求 A 點轉角 θ_A 之影響線。(20 分)



圖二

【問題剖析】

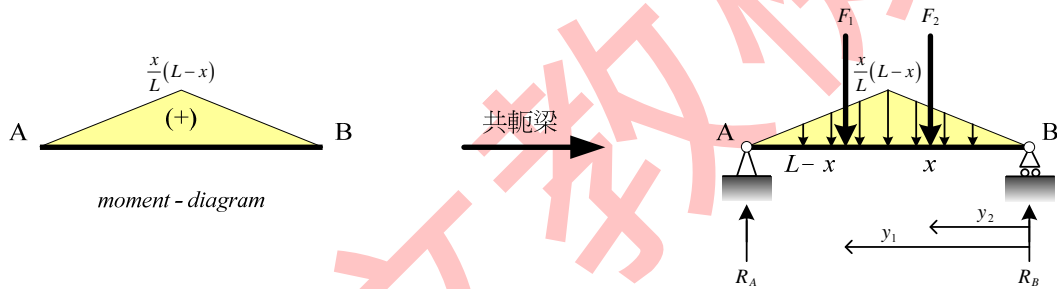
本題使用共軛梁法求解，共軛梁上的 A 點支承反力函數，即為 θ_A 之影響線

【解題思路】

- (1) 繪出一單位力作用下，AB 梁之彎矩圖
- (2) 轉換為共軛梁，求出共軛梁中，A 點之反力 R_A^*
- (3) R_A^* 即為 θ_A

【參考解答】

(1)



$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot (L-x) \cdot \frac{x(L-x)}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(L-x)^2}{L}, \quad y_1 = \frac{1}{3} \cdot (L-x) + x = \frac{1}{3}(L+2x)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x(L-x)}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(L-x)}{L}, \quad y_2 = \frac{2}{3}x$$

(2)

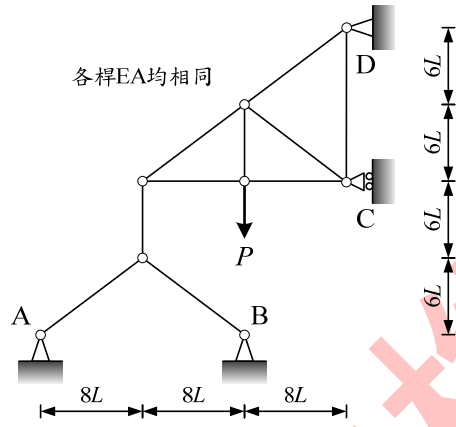
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow R_A \cdot L = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x(L-x)^2}{L} \right] \times \left[\frac{1}{3}(L+2x) \right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(L-x)}{L} \right] \times \left(\frac{2}{3}x \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{L} (L-x) [(L-x) \cdot (L+2x) + 2x^2] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{L} (L-x) [L^2 + xL - 2x^2 + 2x^2] \\ &= \frac{1}{6} \cdot x(L^2 - x^2) \end{aligned}$$

$$\therefore R_A = \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{L} (L^2 - x^2), \quad \therefore \theta_A = \frac{1}{6EI} \frac{x}{L} (L^2 - x^2), \text{ 正值表順時針}$$

【小技巧】

由於梁之 EI 為定值，在計算上，可先將其略去(相當於把 EI 當成 1)，最後寫答案時，再補上即可

三、設有如圖三所示由均勻斷面桿件構成之結構，桿件交接處均為鉸接。不必考慮桿件扭曲問題，試求支承處之反力。(20 分)



圖三

【問題剖析】

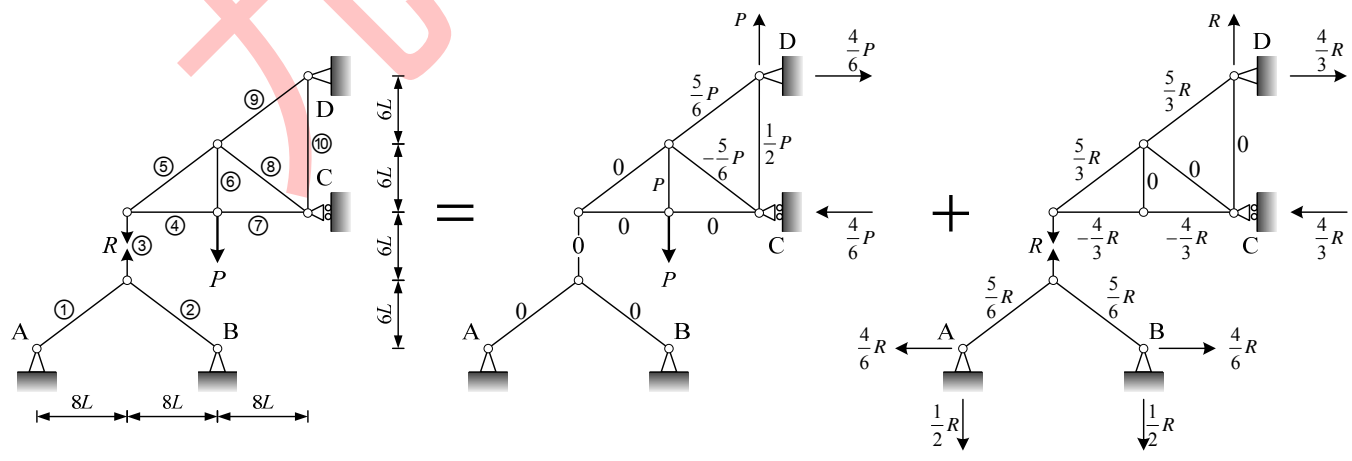
- (1) 本題為一度靜不定的桁架結構，選定贅力桿件後採用最小功法求解
- (2) 在選定贅力桿時，必須注意，不可選擇『經由靜平衡分析即可獲得內力的桿件為贅力桿件』

【解題思路】

- (1) 求解各桿件內力
- (2) 列表計算 $\frac{\partial U}{\partial R} = \sum N \cdot \frac{\partial N}{\partial R} \cdot L$
- (3) 利用 $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ ，解出 R 後，進而求解各支承反力

【參考解答】

(1) 各桿件內力如下圖



(2)

桿件編號	外力 P	墜力 R	$N = P + R$	$\frac{\partial N}{\partial R}$	L	$N \cdot \frac{\partial N}{\partial R} \cdot L$
1	0	$+\frac{5}{6}R$	$\frac{5}{6}R$	$\frac{5}{6}$	$10L$	$\frac{250}{36}RL$
2	0	$+\frac{5}{6}R$	$\frac{5}{6}R$	$\frac{5}{6}$	$10L$	$\frac{250}{36}RL$
3	0	$+R$	R	1	$6L$	$6RL$
4	0	$-\frac{4}{3}R$	$-\frac{4}{3}R$	$-\frac{4}{3}$	$8L$	$\frac{128}{9}RL$
5	0	$+\frac{5}{3}R$	$\frac{5}{3}R$	$\frac{5}{3}$	$10L$	$\frac{250}{9}RL$
6	$+P$	0	P	0	$6L$	0
7	0	$-\frac{4}{3}R$	$-\frac{4}{3}R$	$-\frac{4}{3}$	$8L$	$\frac{128}{9}RL$
8	$-\frac{5}{6}P$	0	$-\frac{5}{6}P$	0	$10L$	0
9	$+\frac{5}{6}P$	$+\frac{5}{3}R$	$\frac{5}{6}P + \frac{5}{3}R$	$\frac{5}{3}$	$10L$	$\left(\frac{250}{18}P + \frac{250}{9}R\right)L$
10	$+\frac{1}{2}P$	0	$\frac{1}{2}P$	0	$12L$	0

$$\Sigma \left(\frac{250}{18}P + \frac{935}{9}R \right) L$$

最小功法： $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$

$$\therefore \Sigma N \cdot \frac{\partial N}{\partial R} \cdot \frac{L}{EA} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{250}{18}P + \frac{935}{9}R = 0 \rightarrow R = -0.1337P$$

(3)

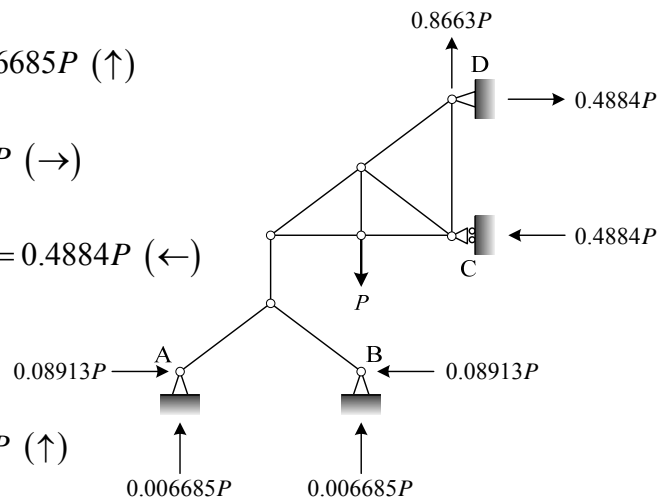
$$\therefore A_y = B_y = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2} \times (-0.1337P) = -0.06685P \ (\uparrow)$$

$$A_x = \frac{4}{6}R = \frac{4}{6} \times (-0.1337P) = -0.08913P \ (\rightarrow)$$

$$C_x = \frac{4}{6}P + \frac{4}{3}R = \frac{4}{6}P + \frac{4}{3} \times (-0.1337P) = 0.4884P \ (\leftarrow)$$

$$D_x = \frac{4}{6}P + \frac{4}{3}R = 0.4884P \ (\rightarrow)$$

$$D_y = P + R = P + (-0.1337P) = 0.8663P \ (\uparrow)$$



【小技巧】

- (1) 為方便計算，在一開始的時候，可將 L/EA 令為 1，這並不影響最後結果
- (2) 計算桿件內力時，可將外力與贅力視為各自單獨作用，最後再加總起來，如此計算較為簡單

四、設有如圖四所示斷面均勻之桿件 ABCDE，B 點為 A、C 二點之中點。E 點受水平力 P 作用，試求當 B 點之垂直變位絕對值 ($|\delta_B|$) 與 E 點之垂直變位絕對值 ($|\delta_E|$) 相等時， m/L 之值為若干？(25 分)

圖四

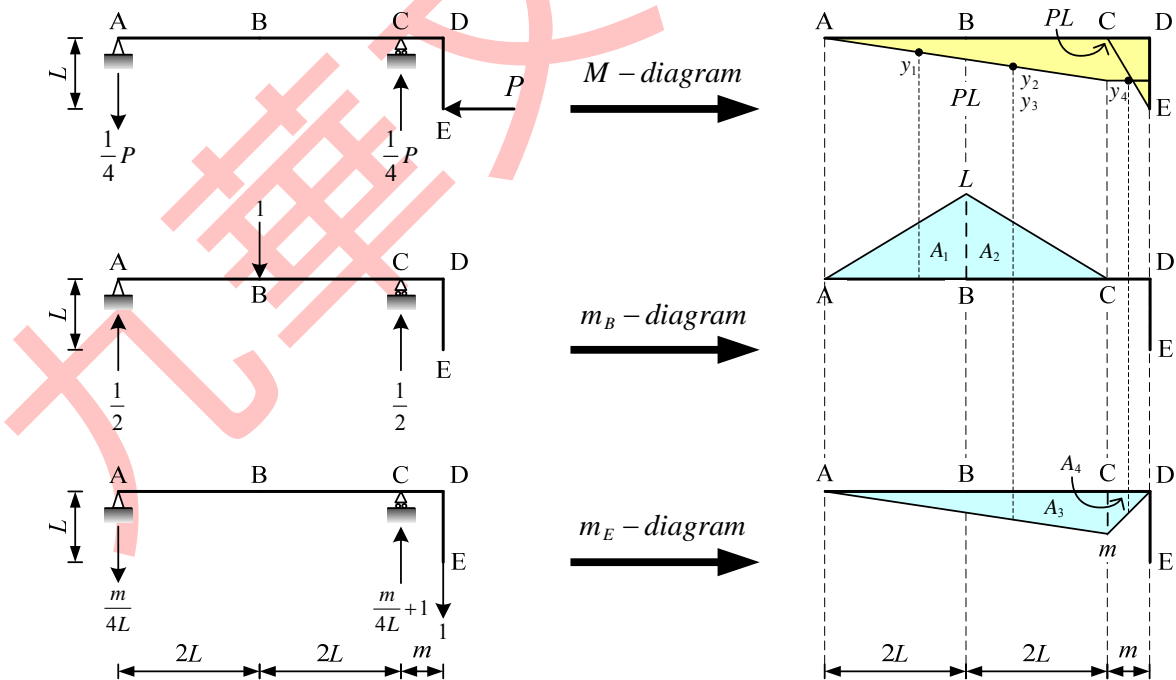
【問題剖析】

- (1) 本題為靜定剛架結構求解變位的問題，使用單位力法配合體積積分求解
- (2) 98 年普考-結構學概要與鋼筋混凝土學概要第 2 題為類似題(詳見本班題型班講義結構學第三章 例題 14)

【解題思路】

- (1) 繪製 M 與 m 彎矩圖
- (2) 計算相對應之面積與形心座標
- (3) 利用 $(|\delta_B|) = (|\delta_E|)$ 求解 m/L 之值

【參考解答】



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2L \cdot L = L^2$$

$$y_1 = \frac{PL}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} PL$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2L \cdot L = L^2$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \times PL + \frac{1}{2} PL \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} PL$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 4L \cdot m = 2mL$$

$$y_3 = PL \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} PL$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot m = \frac{m^2}{2}$$

$$y_4 = PL$$

$$\sum A_i y_i = 0 \rightarrow -A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3} PL^3 - \frac{2}{3} PL^3 + \frac{4}{3} m PL^2 + \frac{1}{2} m^2 PL = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m^2 + \frac{4}{3} mL - PL^2 = 0$$

$$\rightarrow m = 0.61L$$

【小技巧】

(1) EI 為定值，計算上把 EI 設為 1 可簡化計算

(2) $\int m \frac{M}{EI} dx = \sum A_i y_i$ 為體積積分之技巧，常見之計算技巧是以『 $\frac{M}{EI}$ 圖之面積』，乘以『 $\frac{M}{EI}$ 圖面積

之形心，對應至 m 圖之座標值』。亦可以『以 m 之面積』乘以『 m 之面積形心對應到的 M 圖之座標值』。本題便是如此計算。

五、設有如圖五所示之平面剛架，柱之彎曲剛度均為 EI ；梁十分堅硬，彎曲剛度可視為無限大。B、G 二點分別承受向左及向右之 P 力。試用傾角變位法 (slope deflection method) 解此剛架，繪製軸向力圖、剪力圖、彎矩圖與彈性變形曲線。(25 分)

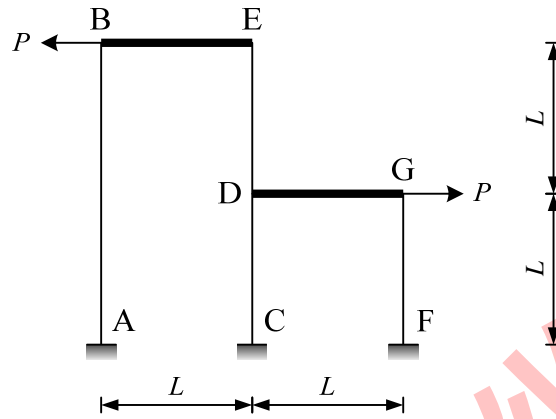


圖 5

【問題剖析】

- (1) 本題為雙層兩跨之靜不定正交剛架分析
- (2) 節點 B、E、D、G 沒有轉角，本題僅有兩個側移自由度
- (3) DE 桿件的水平側移量即為『二樓之層間位移』

【解題思路】

- (1) 計算構材角 R 、勁度 K 之比值(本題無外力造成之固端彎矩)
- (2) 列傾角變位式
- (3) 列平衡方程式求解 R 後，可得各桿端彎矩
- (4) 繪製軸力、剪力、彎矩圖

【參考解答】

- (1) 構材角比值

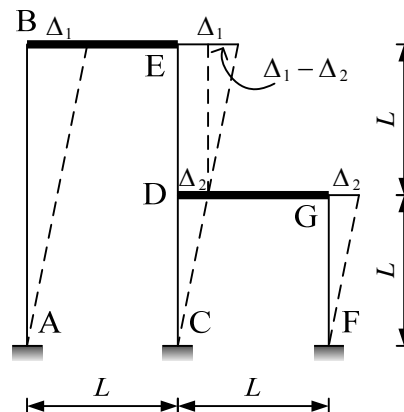
$$R_{AB} = R_1 = \frac{\Delta_1}{2L}$$

$$R_{CD} = R_{GF} = R_2 = \frac{\Delta_2}{L}$$

$$R_{DE} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} = 2R_1 - R_2$$

- (2) 勁度比

$$k_{AB} : k_{DE} : k_{CD} : k_{GF} = \frac{I}{2L} : \frac{I}{L} : \frac{I}{L} : \frac{I}{L} = 1 : 2 : 2 : 2$$



(3) 傾角變位式

$$M_{AB} = 2 \cdot [-3 \cdot R_1] = -6R_1$$

$$M_{BA} = 2 \cdot [-3 \cdot R_1] = -6R_1$$

$$M_{CD} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot R_2] = -12R_2$$

$$M_{DC} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot R_2] = -12R_2$$

$$M_{FG} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot R_2] = -12R_2$$

$$M_{GF} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot R_2] = -12R_2$$

$$M_{DE} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot (2R_1 - R_2)] = -24R_1 + 12R_2$$

$$M_{ED} = 2 \times 2 \cdot [-3 \cdot (2R_1 - R_2)] = -24R_1 + 12R_2$$

(4) 平衡方程式

① 整體水平剪力總和為零

$$P + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{2L} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L} + \frac{M_{FG} + M_{GF}}{L} = P$$

$$\Rightarrow M_{AB} + M_{BA} + 2(M_{CD} + M_{DC} + M_{FG} + M_{GF}) = 0$$

$$\Rightarrow -6R_1 - 6R_1 + 2(-12R_2 - 12R_2 - 12R_2 - 12R_2) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 + 8R_2 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

② 取 ABED 框架之水平剪力總和為零

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{2L} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{L} = P$$

$$\Rightarrow M_{AB} + M_{BA} + 2(M_{DE} + M_{ED}) = 2PL$$

$$\Rightarrow -12R_1 + 2(-24R_1 + 12R_2 - 24R_1 + 12R_2) = 2PL$$

$$\Rightarrow -108R_1 + 48R_2 = 2PL \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

聯立①、②式

$$R_1 = -\frac{1}{57}PL, \quad R_2 = \frac{1}{456}PL$$

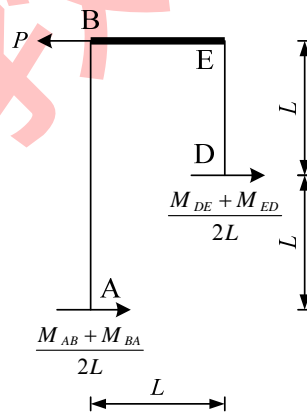
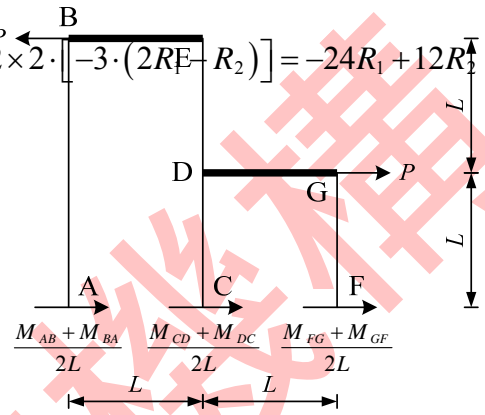
解得：

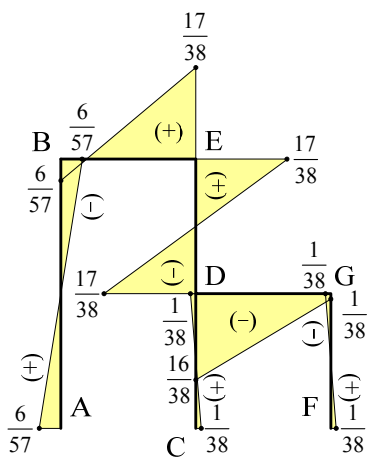
$$M_{AB} = \frac{6}{57}PL \quad M_{BA} = \frac{6}{57}PL$$

$$M_{CD} = -\frac{1}{38}PL \quad M_{DC} = -\frac{1}{38}PL$$

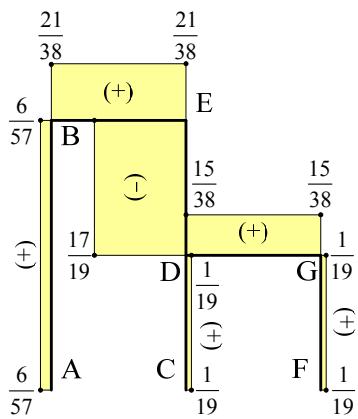
$$M_{FG} = -\frac{1}{38}PL \quad M_{GF} = -\frac{1}{38}PL$$

$$M_{DE} = \frac{17}{38}PL \quad M_{ED} = \frac{17}{38}PL$$

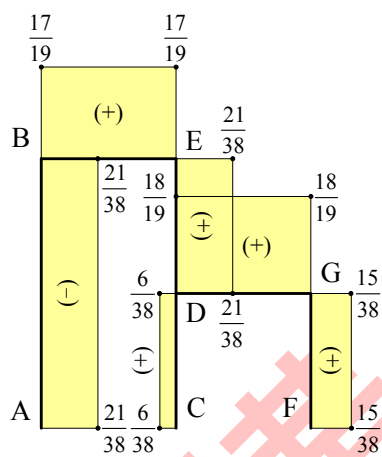




moment - diagram (kN-m)



shear - diagram (kN)



axial - diagram (kN)

九華文教機構

土壤力學

一、統一土壤分類法中 $\frac{\text{烘乾土壤液性限度}(LL_{oven\ dried})}{\text{未烘乾土壤液性限度}(LL_{not\ dried})} < 0.75$ 之判別式可用於分類何種土壤？
試說明判別式之意義，並列出此種土壤之分類符號和工程性質。(20 分)

【參考解答】

- (一) $\frac{LL_{oven\ dried}}{LL_{not\ dried}} < 0.75$ 為「有機質土壤」之判別，若 $\frac{LL_{oven\ dried}}{LL_{not\ dried}} > 0.75$ 則為無機質土壤。
- (二) 有機質土壤較無機質土壤具有較高的塑性指數及液性限度，故當其水份烘乾後，將產生大量之收縮，故 $\frac{LL_{oven\ dried}}{LL_{not\ dried}}$ 為有機質土壤之判別。
- (三) 有機質土壤分類符號為「O」，若液性限度 $LL < 50$ ，則為 OL 之低塑性有機質土壤，若液性限度 $LL > 50$ ，則為 OH 之高塑性有機質土壤。
- (四) 有機質土壤之工程性質如下：
1. 自然含水量可達 200% ~ 300%
 2. 具有較高之塑性指數且滲透性低
 3. 具高壓縮性，另次壓密可能造成大量沉陷

二、試列舉試驗室、現場及經驗公式決定土壤滲透係數 (Coefficient of Permeability) 之各種方法。(20 分)

【參考解答】

(一)試驗室可用滲透儀來決定滲透係數，可分為定水頭式試驗和變水頭式試驗兩種。

1.定水頭試驗：

$$Q = Avt \quad Q = t \text{ 時間內的總出流量}$$

$$v = ki = k \frac{h}{L} \quad A = \text{土樣之截面積}$$

$$k = \frac{QL}{Aht}$$

2.變水頭試驗：

$$k = \frac{aL}{A\Delta t} \ln \frac{h_1}{h_2} = 2.3 \frac{aL}{A\Delta t} \log_{10} \frac{h_1}{h_2}$$

a = 豎管面積, A, L = 土樣面積與長度, Δt = 豎管內水頭由 h_1 降至 h_2 所需之時間

(二)現場決定土壤滲透係數，理論上可用定水頭或變水頭式試驗推導，但通常採用抽水試驗來決定土壤滲透係數。

(三)對於各種不同的土壤類型，可由一些經驗公式和圖表來求得土壤滲透係數。如 *Hazen* (1911)曾提出一有效粒徑 D_{10} 相關於土壤滲透係數之經驗公式。

$$k = cD_{10}^2$$

k : cm/sec, D_{10} : mm, c : 常數, 約介於1~1.5之間

三、兩相同砂土試體分別施作三軸剪力試驗及直接剪力試驗，在三軸試驗，先以圍壓 450 kPa 將試體進行壓密，然後打開排水閥，施加軸差應力；在破壞時，軸差應力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 達 1100 kPa。在直接剪力試驗，施加正向壓力為 450 kPa，當剪應力達 297 kPa 時，該試體破壞。分別求在三軸試驗及直接剪力試驗破壞時之最大主應力、最小主應力及砂土試體之抗剪角。(20 分)

【參考解答】

(一)三軸試驗破壞時：

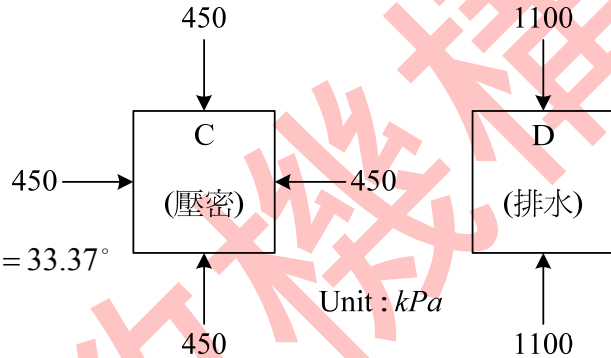
$$\therefore \sigma'_1 = \sigma'_3 K_p + 2c' \sqrt{K_p}, \text{ 且砂土 } c' = 0$$

$$\therefore \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$(1100 + 450) = 450 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) \rightarrow \phi' = 33.37^\circ$$

最大主應力： $\sigma'_1 = 1100 + 450 = 1550 \text{ kPa}$

最小主應力： $\sigma'_3 = 450 \text{ kPa}$



(二)直剪試驗破壞時：

$$\therefore \tau = c' + \sigma' \tan \phi', \text{ 且砂土 } c' = 0$$

$$\therefore 297 = 450 \tan \phi' \rightarrow \phi' = 33.42^\circ$$

繪圖求最大主應力及最小主應力

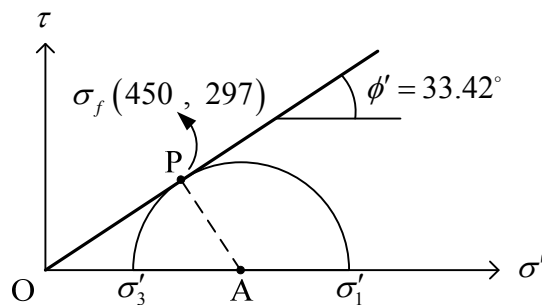
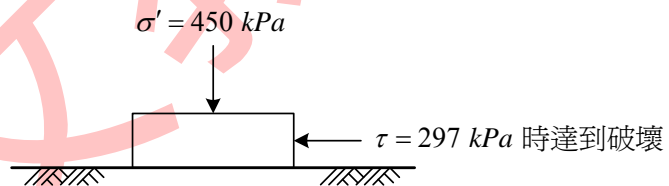
$$\overline{OP} = \sqrt{450^2 + 297^2} = 539.17$$

$$\tan \phi' = \frac{AP}{OP} \rightarrow \overline{AP} = r = \overline{OP} \tan \phi' = 539.17 \tan 33.42^\circ = 355.79$$

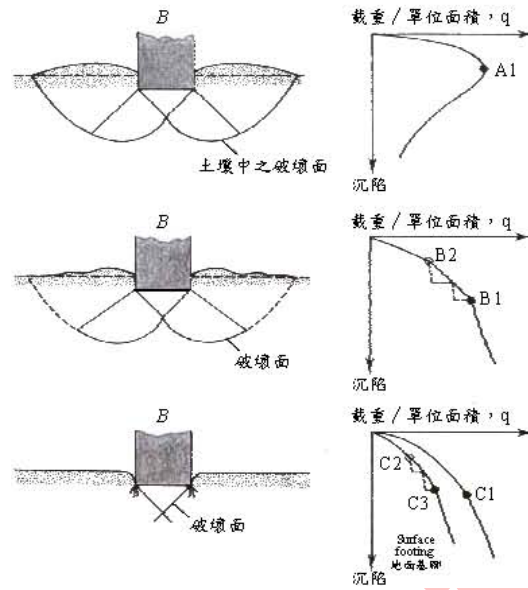
$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{539.17^2 - 355.79^2} = 645.98$$

最大主應力： $\sigma'_1 = \overline{OA} + \overline{AP} = 645.98 + 355.79 = 1001.77 \text{ kPa}$

最小主應力： $\sigma'_3 = \overline{OA} - \overline{AP} = 645.98 - 355.79 = 290.19 \text{ kPa}$



四、試說明下圖中三種淺基礎支承力 (bearing capacity) 破壞型式，及其可能發生破壞之條件。
(20 分)



【參考解答】

- (一) 全面剪力破壞：位於緊密砂土($\phi > 38^\circ$)或堅硬黏土($q_u > 10t/m^2$)之地層。當單位面積上之載重為 A1 時，支承基礎之地層將會發生突然性破壞，且土壤之破壞面會伸展至地表面。
- (二) 局部剪力破壞：位於中等緊密砂土($28^\circ \leq \phi \leq 38^\circ$)或中等夯實之黏性土層。基礎上載重之增加會伴隨沉陷之增加，土壤之破壞面會逐漸由基礎向外伸展。當基礎上單位面積載重為 B2 時，基礎之移動將突然產生，基礎需大量的移動，才會使土壤之破壞面伸展至地表面。當大於極限承載力 B2 時，載重增加會伴隨增加大量之基礎沉陷。此種破壞型式下， q 尖峰無法確定。
- (三) 衝孔剪力破壞：位於鬆散土壤(砂土 $\phi < 28^\circ$)之地層。土壤破壞面將不會延伸至地表面，超過極限破壞載重 C1，其載重沉陷圖將呈陡峭並近於線性。

五、一座重力式擋土牆之牆高 $H = 6.7 \text{ m}$ ，牆後回填土之內摩擦角 $\phi = 20^\circ$ ，凝聚力 $c = 12 \text{ kN/m}^2$ ，回填土單位重為 18.2 kN/m^3 。依據朗金 (Rankine) 土壓力理論：(20 分)

(一) 試計算回填土張力裂縫之深度。

(二) 若無張力裂縫，每單位長度作用於牆面 (per unit length of wall) 之主動土壓合力。

(三) 若張力裂縫開裂，每單位長度作用於牆面之主動土壓合力。

(四) 若張力裂縫開裂且裂縫內充滿雨水，每單位長度作用於牆面之側向合力。

【參考解答】

(一)

$$\because \sigma_a = \sigma_v K_a - 2c\sqrt{K_a}$$

假設 $\sigma_a = 0$ ，張力裂縫深度 = z

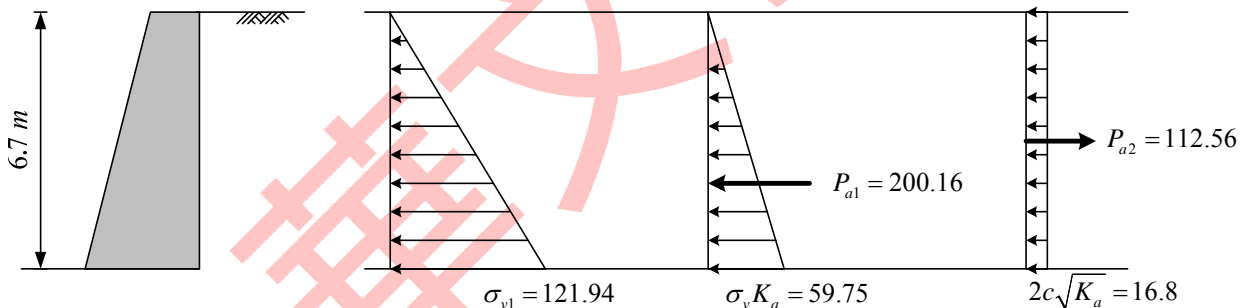
$$\sigma_v = \gamma H = 18.2z$$

$$c = 12$$

$$K_a = \tan^2\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right) = \tan^2\left(45^\circ - \frac{20^\circ}{2}\right) = 0.49$$

$$\therefore 0 = 18.2z \cdot 0.49 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{0.49} \rightarrow z = 1.88 \text{ m}$$

(二)



$$\sigma_{v1} = \gamma H = 18.2 \times 6.7 = 121.94 \text{ kN/m}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a1} &= \sigma_v K_a \\ &= 121.94 \times 0.49 = 59.75 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

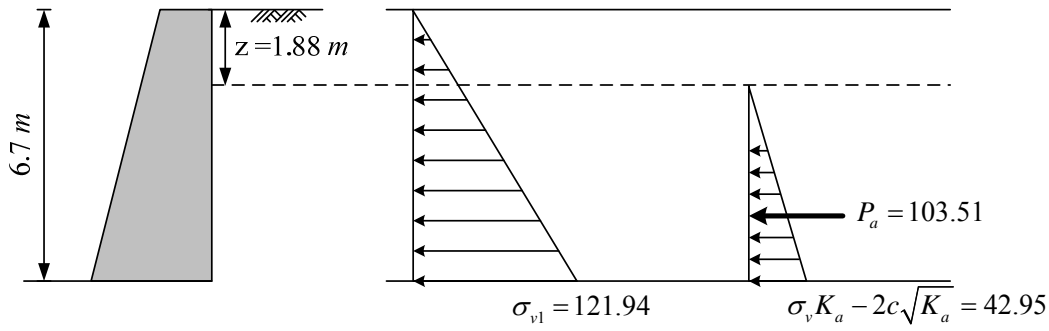
$$P_{a1} = \frac{1}{2} \times 59.75 \times 6.7 = 200.16 \text{ kN/m}$$

$$2c\sqrt{K_a} = 2 \times 12 \sqrt{0.49} = 16.8$$

$$P_{a2} = 16.8 \times 6.7 = 112.56 \text{ kN/m}$$

$$P = P_{a1} - P_{a2} = 200.16 - 112.56 = 87.6 \text{ kN/m}$$

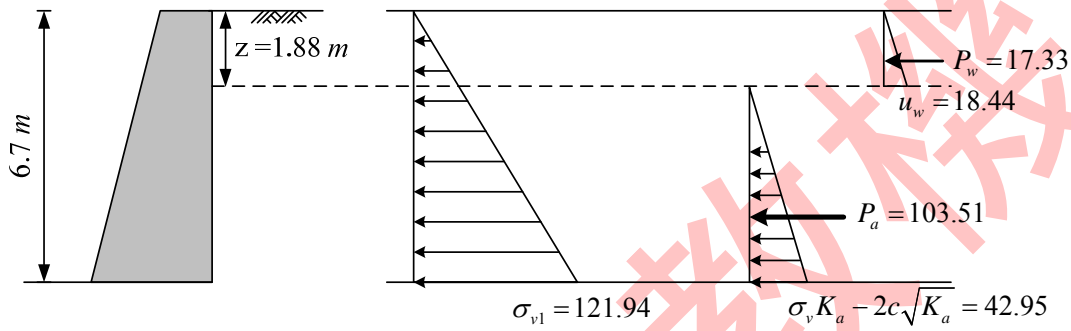
(三)



$$\sigma_v K_a - 2c\sqrt{K_a} = 59.75 - 16.8 = 42.95$$

$$P_a = \frac{1}{2} \times 42.95 \times (6.7 - 1.88) = 103.51 \text{ kN/m}$$

(四)



$$u_w = \gamma_w z = 9.81 \times 1.88 = 18.44 \text{ kN/m}^2$$

$$P_w = \frac{1}{2} \times 18.44 \times 1.88 = 17.33 \text{ kN/m}$$

$$P_a = P_{a1} + P_w = 103.51 + 17.33 = 120.84 \text{ kN/m}$$